MIDTOETS CALCULUS II, 2010

Vrijdag 12 maart, 9.00–11.00, Nieuwe Tentamenhal 3

(1) Defineer recursief de rij $\{a_n\}$ als

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Bewijs met volledige inductie dat

(a)

$$0 < a_n \leq 2, \quad \text{voor alle } n$$

(b) De rij is dalend.

Beargumenteer dat de rij convergeert, en bepaal de limiet. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(2) Bepaal of de volgende reeks absoluut convergent, voorwaardelijk (conditionally) convergent, dan wel divergent is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(n+1)^n}$$

abs. conv.

(3) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wordt gedefineerd door de recursieve vergelijking

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

div

Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Bepaal of deze reeks convergeert dan wel divergeert.

(4) Bepaal de machtreeks (om $x = 0$, dus van de vorm $\sum c_n x^n$) van

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x}$$

$2^n x^n$

Bepaal vervolgens de machtreeks om $x = 0$ van

$$g(x) = \frac{x^2}{(1 - 2x)^2}$$

$4^n(x-x^2)^n$

en bepaal de verzameling van *alle* x waarvoor deze machtreeks convergeert. $\{x \mid \frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) < x < (\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}))\}$

(5) Beschouw de volgende parametrische kromme in $\mathbb{R}^2$

$$x = a\cos^3\varphi, \quad y = a\sin^3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

?(a) Bepaal de totale lengte van deze kromme. 6?

(b) Bepaal de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ in een willekeurig punt op de kromme. $\frac{1}{\tan\varphi}$

(6) Bepaal de puntsgewijze limiet van de rij van functies $\{f_n\}$ gedefineerd door

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

0

Is $\{f_n\}$ uniform convergent ? Beargumenteer uw antwoord. (*Hint*: kijk naar $f(\frac{1}{n})$.) ?

nee, $f(\frac{1}{n}) = 1$